アルゴリズムとプログラミング実践講座

http://akashi.ci.i.u-tokyo.ac.jp/mary/lectures/algorithm/

火曜　13:00 -- 14:30
I-REF 棟 6階　ヒロビー

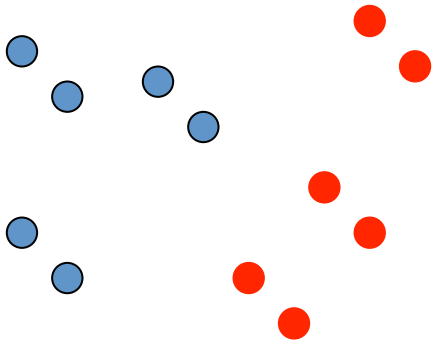
稲葉真理　with 浅井大史・手塚宏史

今週のトピック

計算幾何　と　アルゴリズム

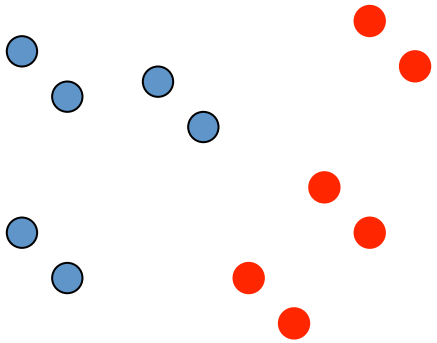
座標がある世界・まっすぐな世界

ｎ　点の　２分割は？



座標がある世界・まっすぐな世界

ｎ　点の　２分割は？



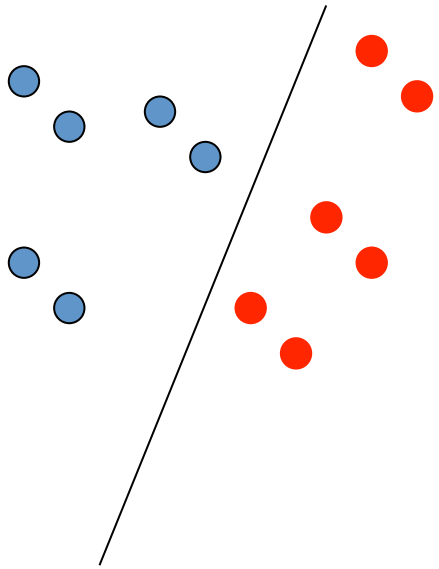
可能性は $O(2^n)$

座標がある世界・まっすぐな世界

ｎ　点の　２分割は？

では平面上の　ｎ点を直線で2分割だと？

では　ｄ　次元だったら？

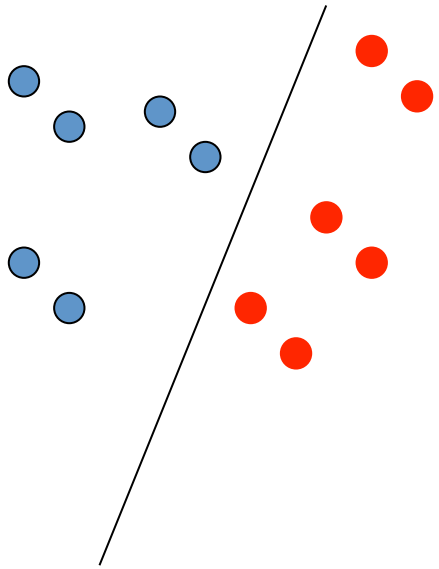


座標がある世界・まっすぐな世界

ｎ　点の　２分割は？

では平面上の　ｎ点を直線で2分割だと？

では　ｄ　次元だったら？



可能性は$O(n^d)$

Linear Separable

計算幾何のいくつかの問題

- 凸包・凸多面体
- （超）平面、線分の交わり
- 三角形分割
- 領域探索と点位置決定問題
- Voronoi 図（近傍図）
- 可視グラフと経路

計算幾何

計算幾何そのものが面白い。

問題が本質的に幾何的構造を持つ場合
幾何的な性質を利用することによって、
素敵なアルゴリズムができることも多い。

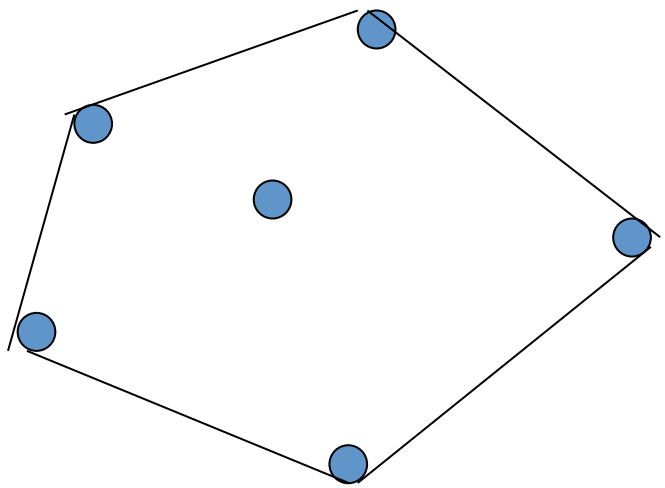
問題を、幾何的にみることで、まったく違う解釈ができて楽しい（こともある）。

凸包問題

S:　平面上の　n　点の集合

CH(S):　Sを含む凸領域で最小のもの

（任意の点が内分点）



各点にピンをたて
輪ゴムをはめたときの
輪ゴムの作る形

いくつかのアルゴリズム

Wrapping アルゴリズム（d=2 凸包を求める）

1. ｙ　座標最小の点に注目（これは凸包上の点）
2. 以下、注目している端点を中心として、新しい端点にあたるまで反時計周りに回転
3. あたった端点に注目（これは凸包上の点）

計算時間　　n: 点数、　　k : 凸包上の端点数

Ｏ（nk）　時間　　→最悪　Ｏ（ｎ^２）

がんばると、

Graham’s Scan （d=2 凸包を求める）

- 凸包内の点を原点として偏角順にソート
- ソート順にStar Shaped Polygon を作る
- 内角 < πとなる点を消去

ソート O（nlog n) 走査 O（n) で O（nlog n)

もう少し複雑なことをすると O（n）

ところで

Wrapping と、Graham’s Scan と
どちらがよいか？

解こうとしている問題の性質次第。
（性質がわかっていれば考慮すべし）
凸包内に点が多いときは、Wrapping の
方が速い

On-Line アルゴリズム

入力が順番にくるもの

入力：点列 $p_1, p_2, \ldots, p_n$

集合　$S_i = \{p_1, p_2, \ldots, p_i\}$ $(i= 1, \ldots, n)$

出力：各i に対して CH(Si)を求める。

incremental アルゴリズム

1. p_i が　CH（S_{i-1})の中か外か(2分探索木）
2. p_i が　CH（S_{i-1})の中なら　p_i は無視

   外なら、凸包を更新

   （2接線を求め不要部分を捨てる）→　O（logn)

凸包と凸多面体

- （超）平面による半空間のインターセクション

  （超）平面　$\Sigma_{1<=i<=d}\ a_i x_i = c$

- 点が、（超）平面のどちら側にあるか、あるいは、平面上にあるかの判定

- 代入してみて、＝なら（超）平面上、不等号の向きが同じならば、同じ側（判定は簡単）

線形計画問題

- 制約

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$$

Maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

線形計画問題の幾何的な性質

- 線形不等式制約

  半空間の交わりと考えられる

  → 凸性を持つ

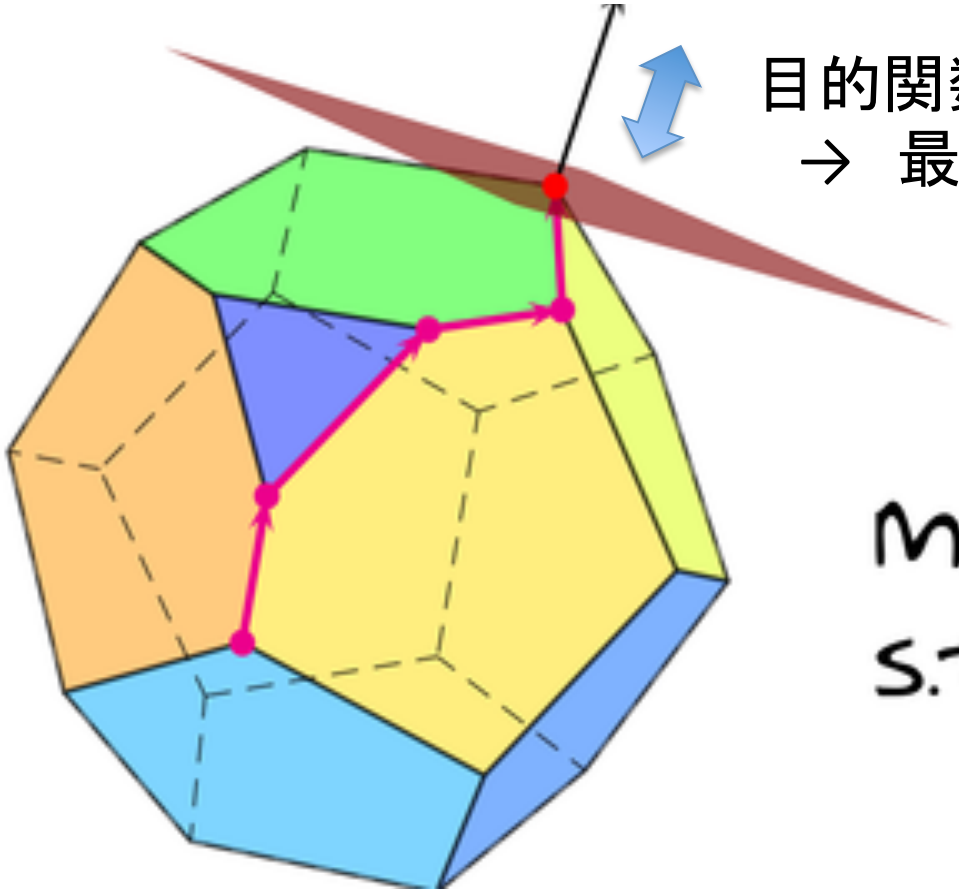
- 目的関数

  超平面が凸体に交わる範囲で

  → 平行に動く.

  最適解は端点を必ず含む.

制約が作る凸多面体の頂点



目的関数の超平面が平行に動く。
→　最適解は、凸多面体の端点

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } A x \leq B$$

http://www.mooc.es/wp-content/uploads/2013/02/linear_and_discrete.png

余談

双対

直線　y＝ ax ＋　b　を別の空間で点（a, b) に
点（x1、y1）を　直線　b＝（－x1）a ＋　y1に

対応させると、上下関係が保存される

再び　ランダムサンプリング

制約が多い線形計画法のための
ランダマイズド　アルゴリズム

randomized algorithm
(制約の数が多い時に有効）

1. $\sqrt{n}$ 個の制約の集合　S_1　をランダムに抽出
2. S_1 で 問題を解いて、最適解を求める
3. S_1 の最適解より上にある制約の集合 T_1 を求める

4. $\sqrt{n}$ 個の制約の集合　S_i　をランダムに抽出
5. $S_i \cup (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})$ に 対する問題を解く
   - $(T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})$ に入ってる最適解の制約式は violate しない
   - さっき網にひっかけてるものとは別の制約式
6. $S_i \cup (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})$ の最適解より上にある制約集合 T_i
7. $\cup T_i$ を制約とする最適解が、全体の最適解

アイディア

- 最適解を決定する制約式は、d 個
  効率良く、この　d　個を探したい。

- 一回サンプルを取ると、少なくとも一つの最適解を決定する制約式を、　T　という集合として、つかまえることができる。

ただし　T_iが大きすぎると、ランダムサンプルの意味がない

最悪なケース

- $\sqrt{n}$個、サンプルをとっても、$\sqrt{n}$－２個しか問題のサイズが減らないかもしれない。

- ｎ の問題を、再帰的にサイズnの問題で解いてもちっとも嬉しくない。

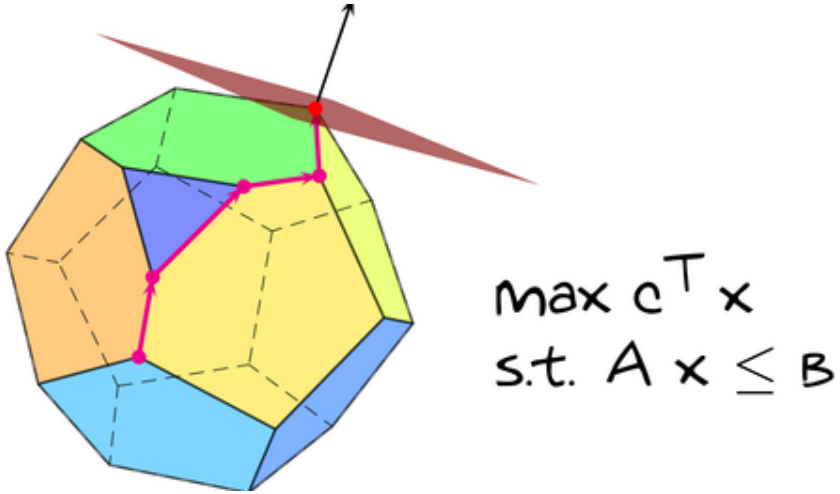
(実は) お金になる線形計画法

たとえば、石油関連企業！

simplex 法

→　縁をたどる

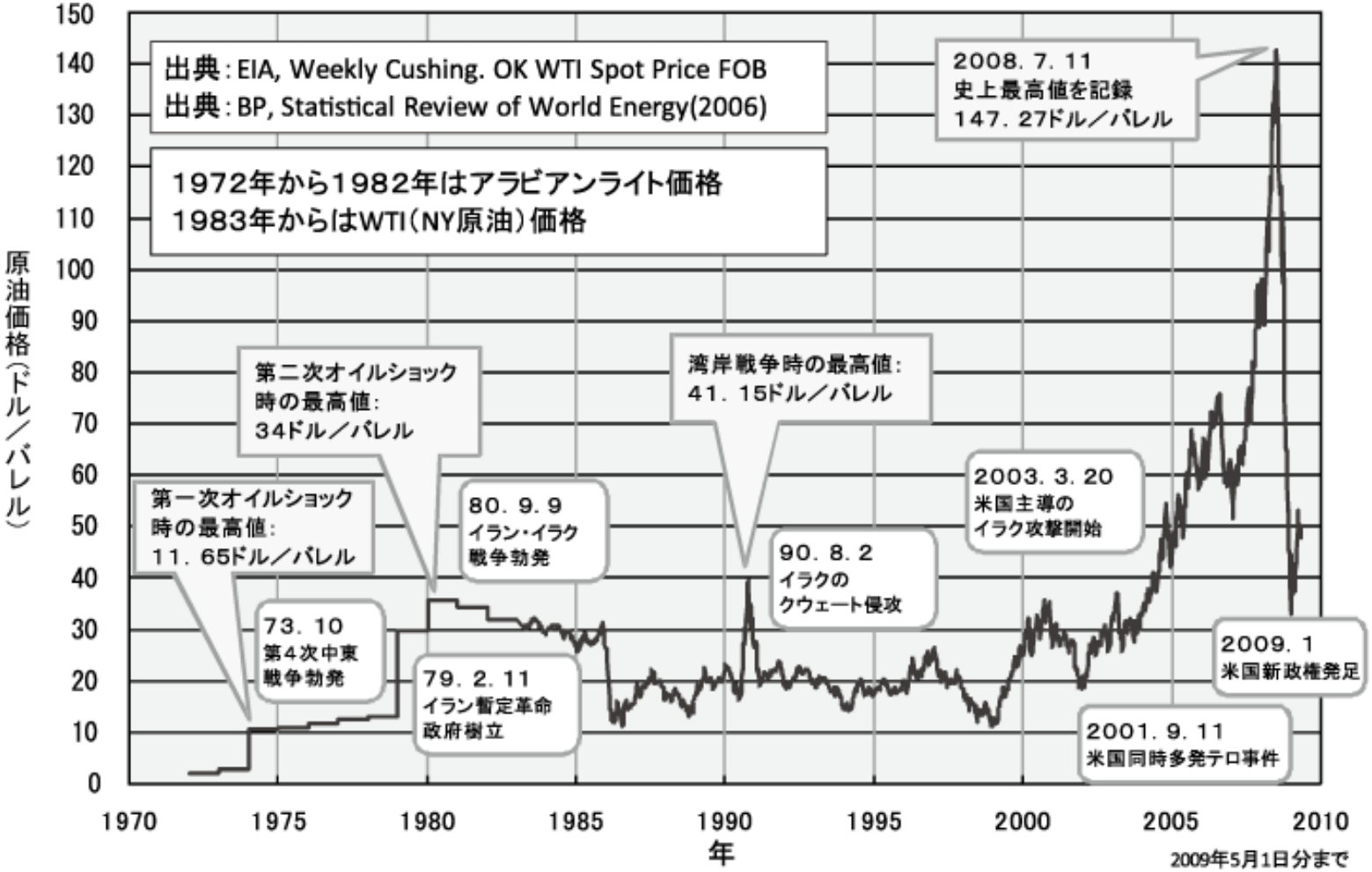
（最悪は時間がかかる）



カーマーカー法

→　凸多面体の中から探す

（たとえば）原油価格の推移



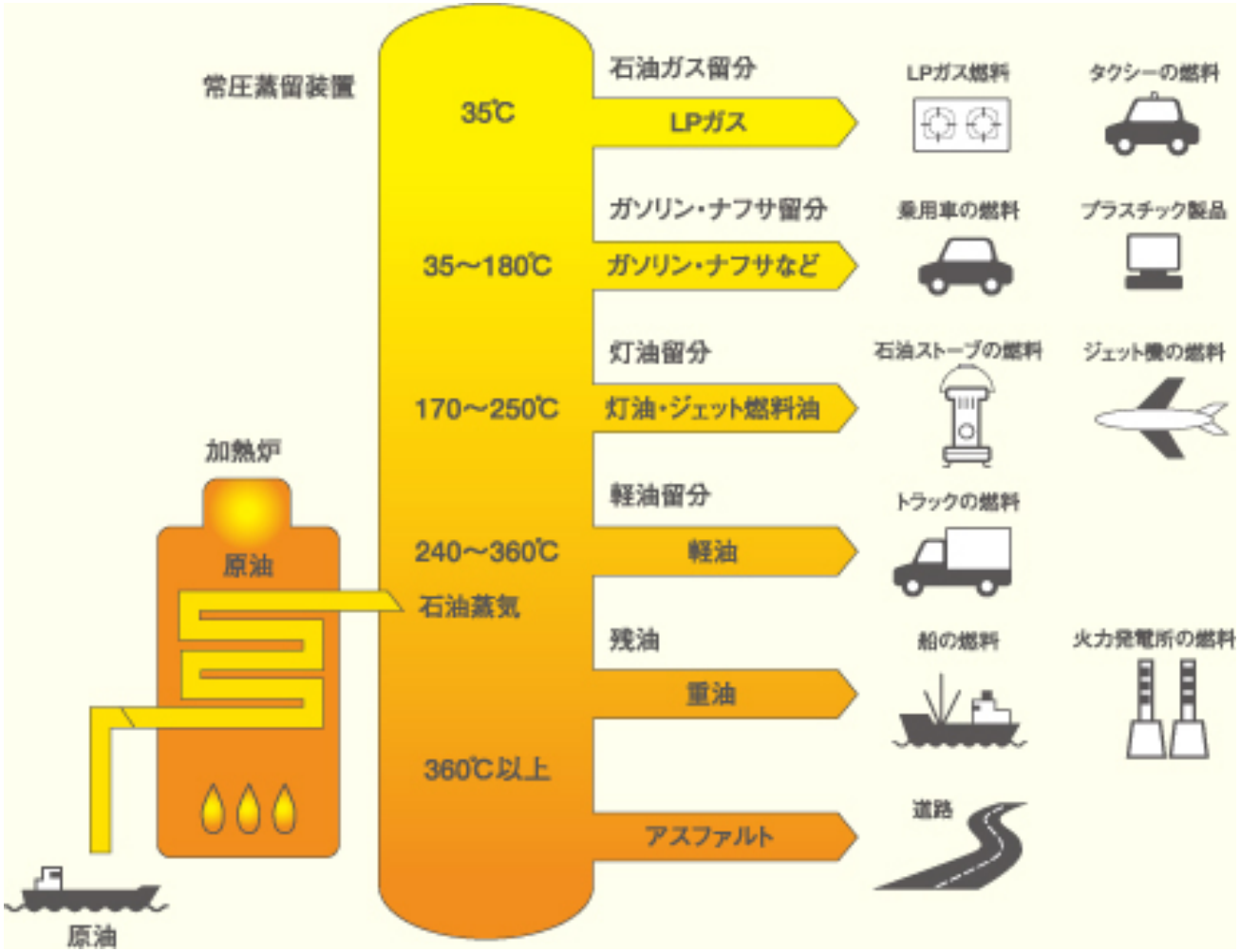
http://www.jama.or.jp/lib/jamagazine/200905/01.html

石油精製で考えないといけないこと

- 原油価格（材料費）
- 原油輸送コスト
- 精製コスト
- 生成物輸送コスト

- 需要推計

石油コンビナート
何を作るかで、硫黄の量も運送費も変わる



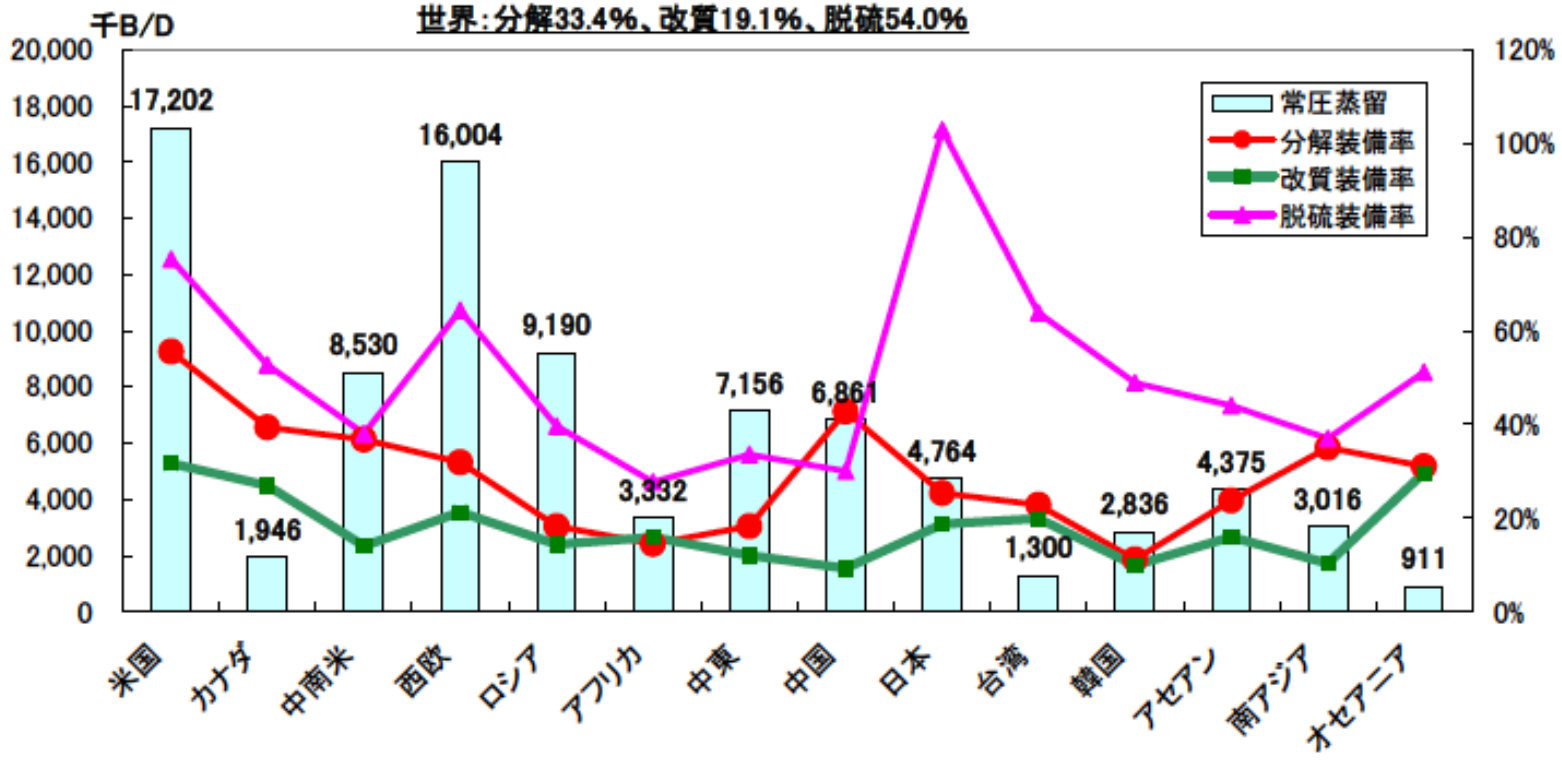
http://www.suzuichi.com/nenryou-top.html

運送費等を考えると、
運ぶより、燃やした方が、お得な場合

http://www.bloomberg.co.jp/news/123-KOV2NK0D9L3501.html

精製能力・脱硫も国によって違う

図 2-3　地域別の 2 次装置装備率の比較(2005 年)



http://eneken.ieej.or.jp/data/pdf/1732.pdf

地域によって「欲しい製品」の割合が違う！

表 2-6-1　地域別製品別需要見通し－2005 年　（千 B/D）

		ガソリン	ナフサ	ジェット灯油	軽油	重油	LPG	他製品	計
1	アメリカ	8,567	359	1,714	3,994	898	2,821	1,174	19,527
2	カナダ	665	65	121	521	134	442	160	2,108
3	中南米	1,569	277	271	1,912	867	1,174	318	6,388
4	西欧	2,537	1,080	1,201	5,805	1,625	1,692	835	14,775
5	ロシア	990	35	280	1,062	604	764	387	4,121
6	アフリカ	644	21	261	958	397	370	99	2,750
7	中東	1,133	195	408	1,449	1,106	711	153	5,155
8	中国	1,052	677	322	2,174	760	864	434	6,283
9	日本	991	797	688	1,085	504	759	211	5,034
10	台湾	176	230	51	105	177	93	60	892
11	韓国	156	735	194	397	359	294	49	2,182
12	アセアン諸国	764	218	433	1,274	744	371	54	3,858
13	南アジア	268	283	336	1,081	348	430	227	2,973
14	オセアニア	381	1	113	316	37	114	42	1,005
15	計	19,893	4,972	6,394	22,133	8,561	10,899	4,202	77,054

http://eneken.ieej.or.jp/data/pdf/1732.pdf

他にも色々な要素

- 何を運ぶと、いくらかかるのか？
（液体か？　ガスか？　電気か？）
状況は、選挙一つで、変わってしまうことも！

→　考えないといけない要素は複雑に沢山
でも、**莫大な金額**
「授業時間割の作成」とはちょっと違う

計算機が高かった時代から計算されていた。

石油精製の問題の定式化

原料:　m種類の原油 $P_1, \ldots P_m$
　　硫黄含有率, 可能量, 価格、輸送コスト

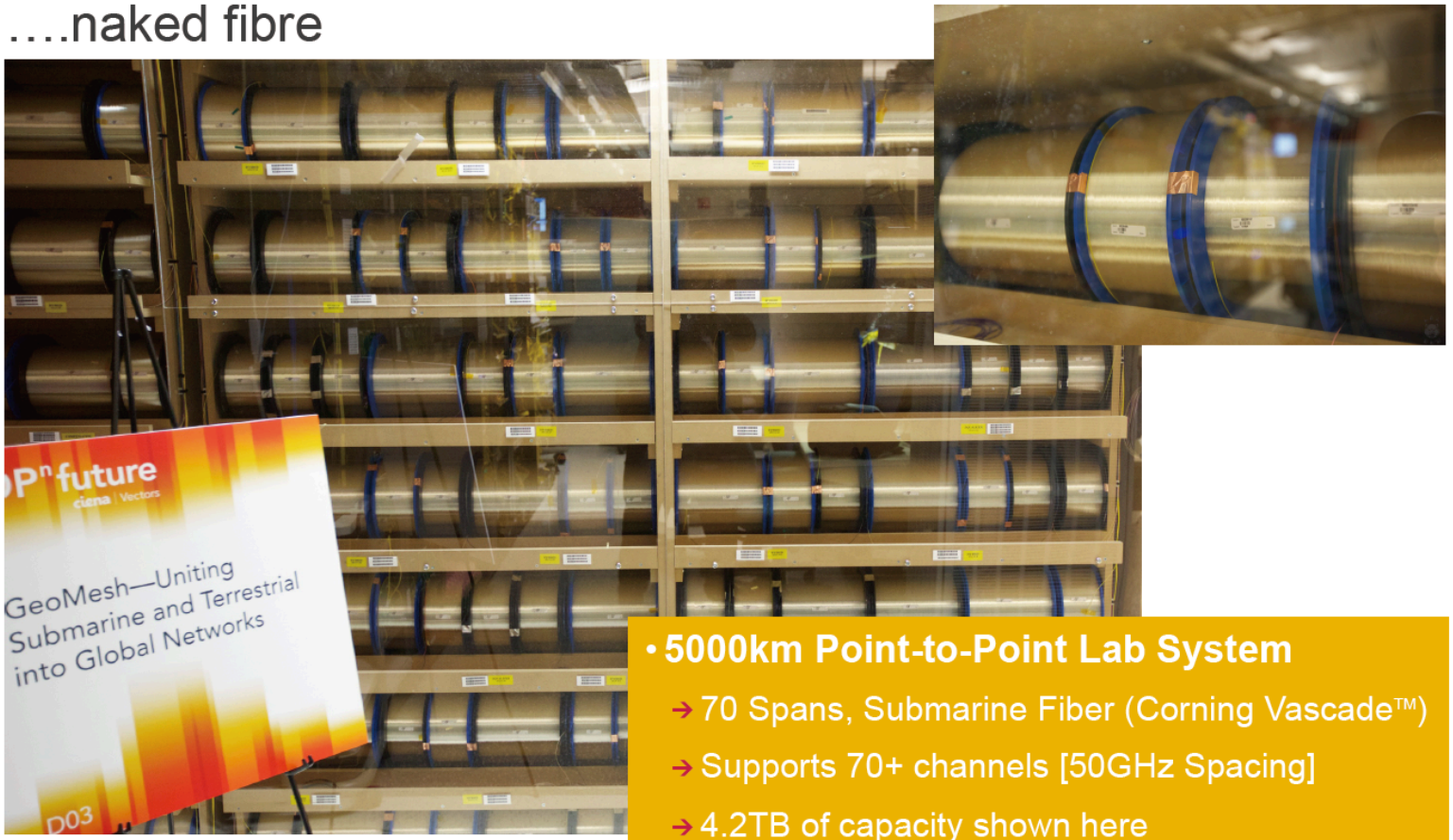
製品:　n種類の石油製品　$Q_1, \ldots Q_n$
　　必要量、硫黄分上限、価格、輸送コスト

→　原料を、それぞれ、どれだけ仕入れて
製品を、それぞれを、どれだけ生産したら、
利益が最大になるか？

問) これは何？　　答) 海底ケーブル

問) これは何？　答)ケーブル水中実験

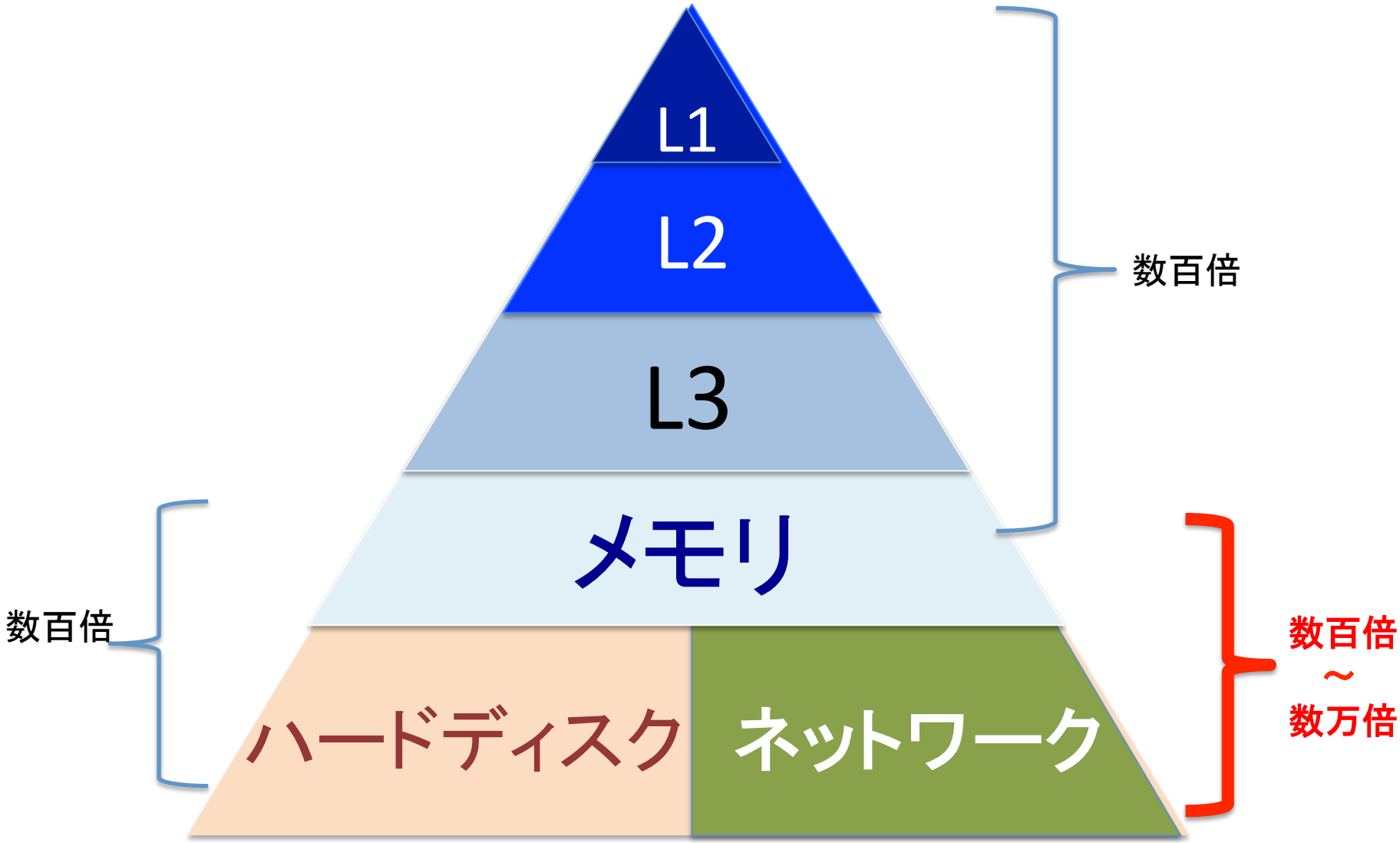
Submarine Network technology
….naked fibre

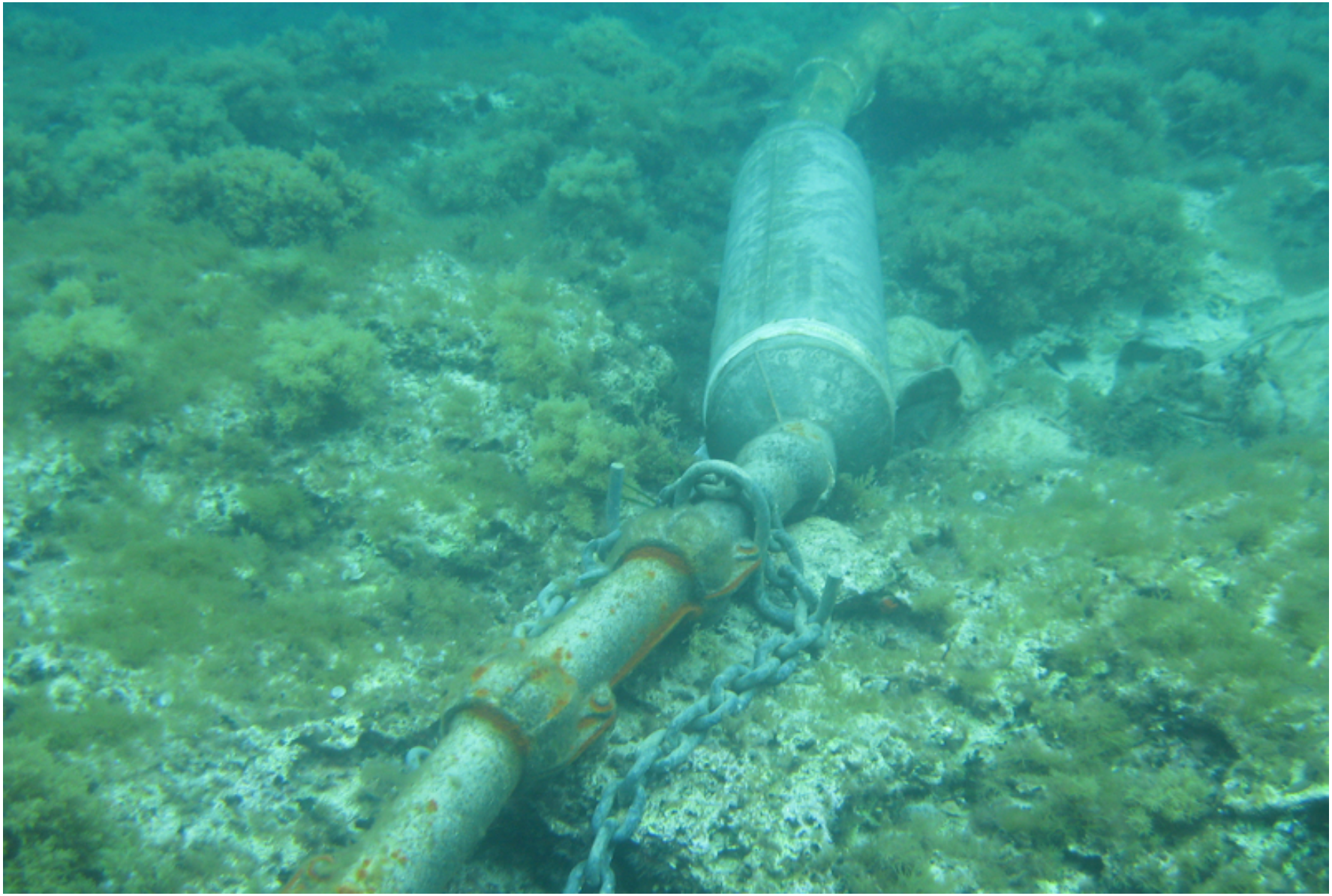


- **5000km Point-to-Point Lab System**
  - → 70 Spans, Submarine Fiber (Corning Vascade™)
  - → Supports 70+ channels [50GHz Spacing]
  - → 4.2TB of capacity shown here

Ciena @ オタワにて

（先週の続き）
インターネットもべき則





http://www.pcsitaly.it/submarine-cable-accessories-department.html

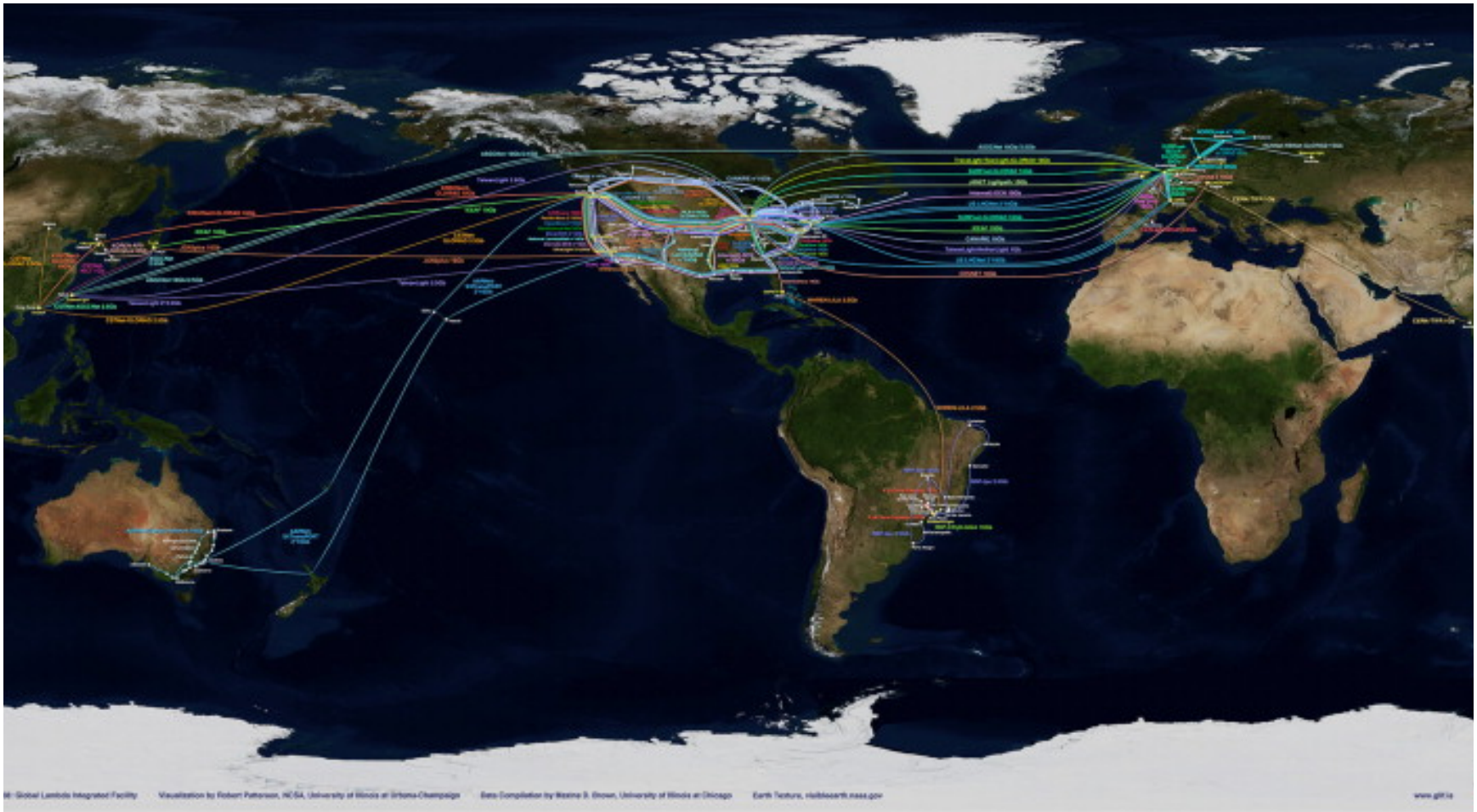
TRANSOCEANIC

TRANSOCEANIC WITH BRANCHING UNITS

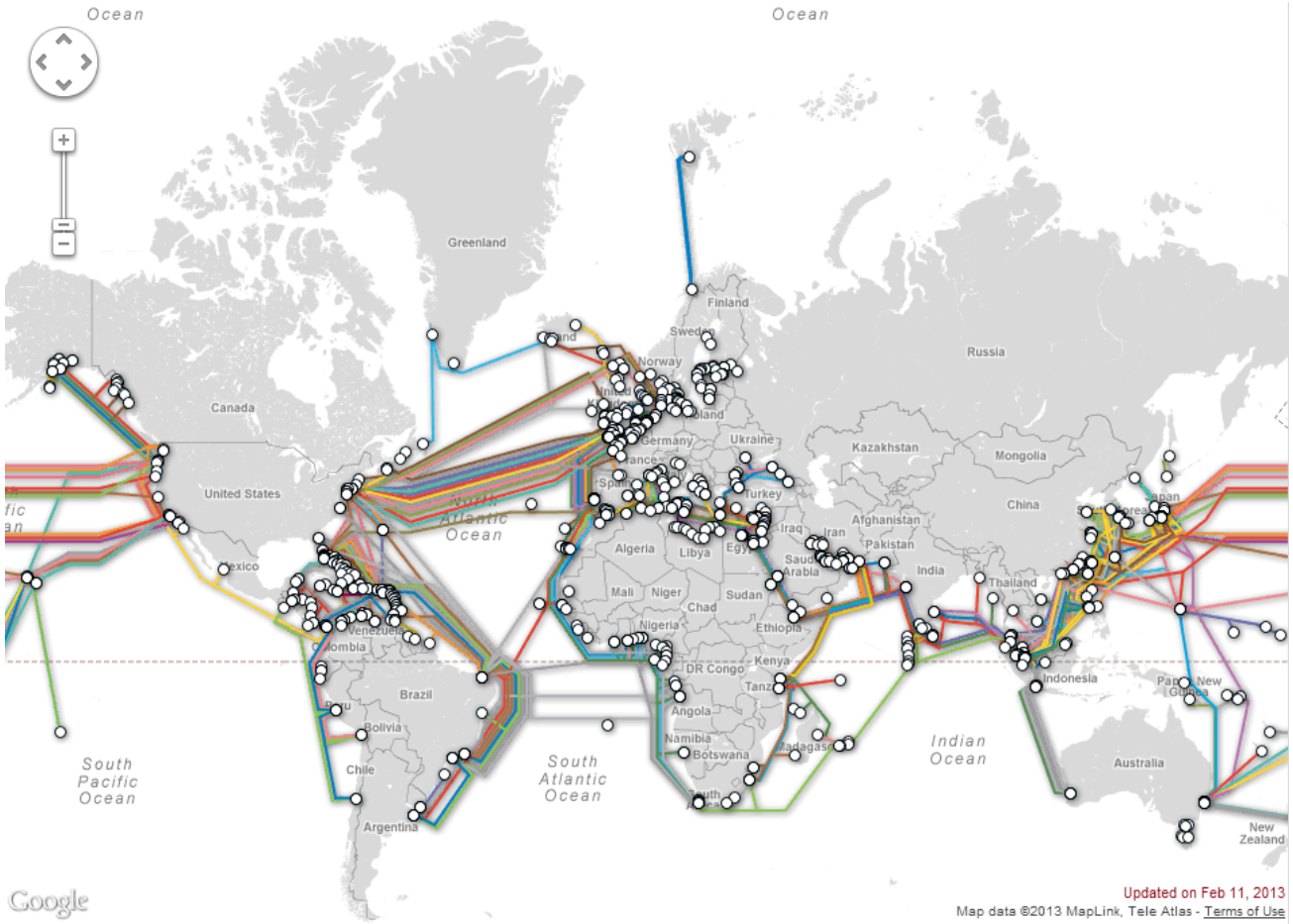
REGIONAL WITH BRANCHING UNITS

http://www.alcatel-lucent.com/solutions/submarine-networks

GLIF
Global Lambda Integrated Facility

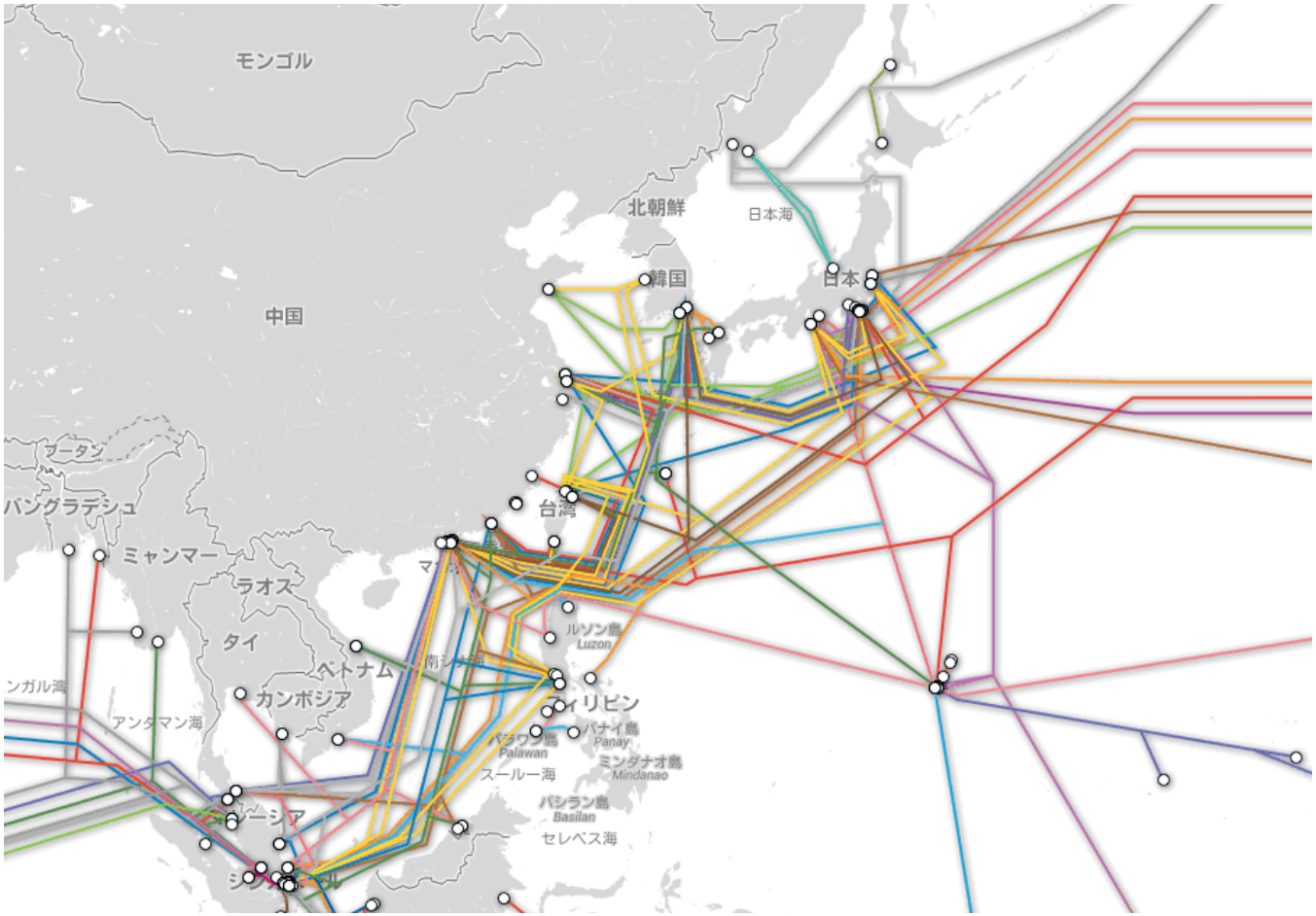


世界中の海底ケーブルの地図



http://www.edugeek.net/forums/links/108671-submarine-cables-poster-interactive-map.html

東アジアの拡大図



http://www.alcatel-lucent.com/solutions/submarine-networks

明治の頃の日本の国際回線事情

明治２年　　東京・横浜開通
明治３年　　大阪・神戸開通

明治４年　　上海・長崎間の海底電線
上海からは２系統ヨーロッパ（ロンドン）へ
シベリア＋上海・香港・サイゴン・シンガポール・デリー
（ロンドンから、大西洋回線でワシントンへ）

明治５年　大久保利通が、ニューヨークから東京の自宅あてに電報。
ニューヨーク長崎間：５時間、長崎東京間：３日

明治６年　長崎東京間開通
港町（船）　→　商業中心　→　政治の中心へ

海底電線

↓

通信衛星

↓

海底ケーブル

telephone v.s. telegram

通信は信用が第一。
「音が伝わる」は、付加価値にならなかった。

イギリスに代表されるヨーロッパでは
世界一周電信網を形成していた。
C&W (Cable & Wireless)

1872　イースタンテレグラフカンパニー （商用）
1934　Cable & Wireless に社名変更

電話のポイント

音声多重　（変調･多重化）→　交換機が重要

配線費用　＋　交換機コスト

通信時も、いくつかの経路
どの経路を通ったら効率が良いのか？
どう配線して、どう交換機を置けば良いのか？

AT & T

カーマーカー法[1984]
　線形計画問題の解を多項式時間で

1985　特許申請
→　アルゴリズムは特許になるのか？
→　このアルゴリズムは新しいのか？

いろいろな議論が起こった

整数と実数の違い？

整数計画問題

- 制約

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$$

Maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

ただし x_i は整数

整数計画法

答えを、整数値に限る

→　たとえば、タンカーの台数

→　とるか、とらないか　（ 0-1 整数計画法）

線形計画法より難しい　（NP-ハード）

0-1整数計画問題

- 制約

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$$

Maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

ただし $x_i = 0$ or 1

線形計画問題の幾何的な性質

- 線形不等式制約

  半空間の交わりと考えられる

  → 凸性を持つ

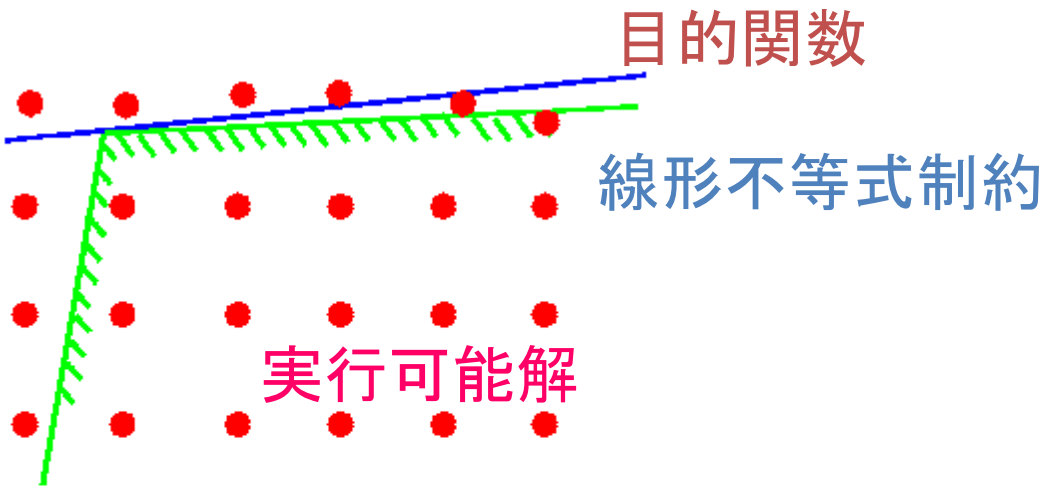
- 目的関数

  超平面が凸体に交わる範囲で

  → 平行に動く.

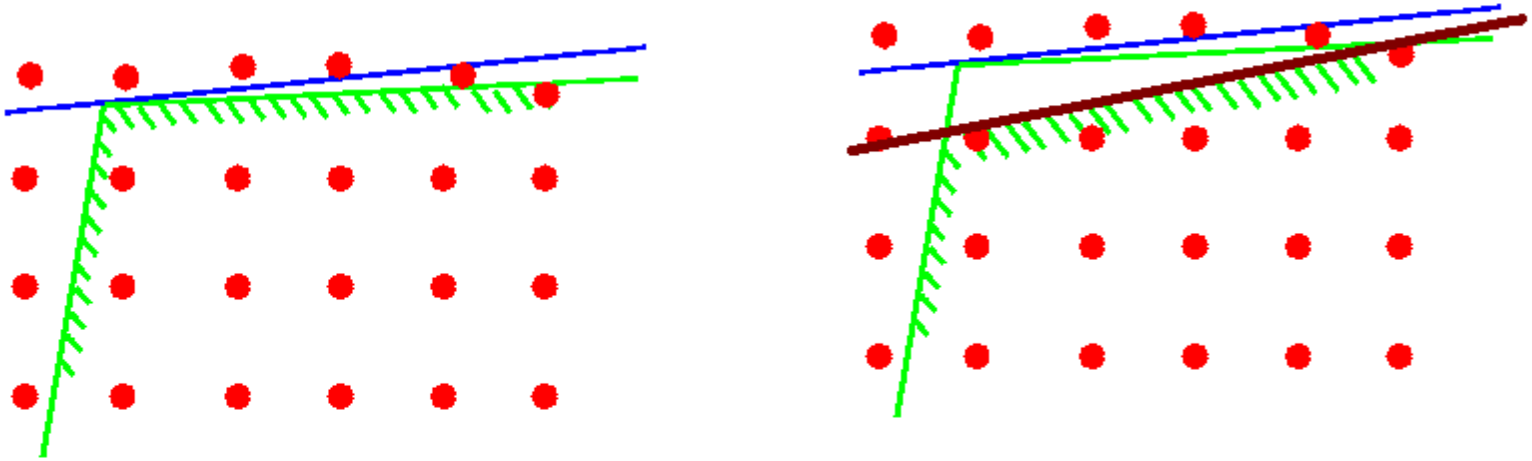
  最適解は端点を必ず含む.

離散構造



端点が整数でない時、端点の
近くに最適解があるとは限らない.

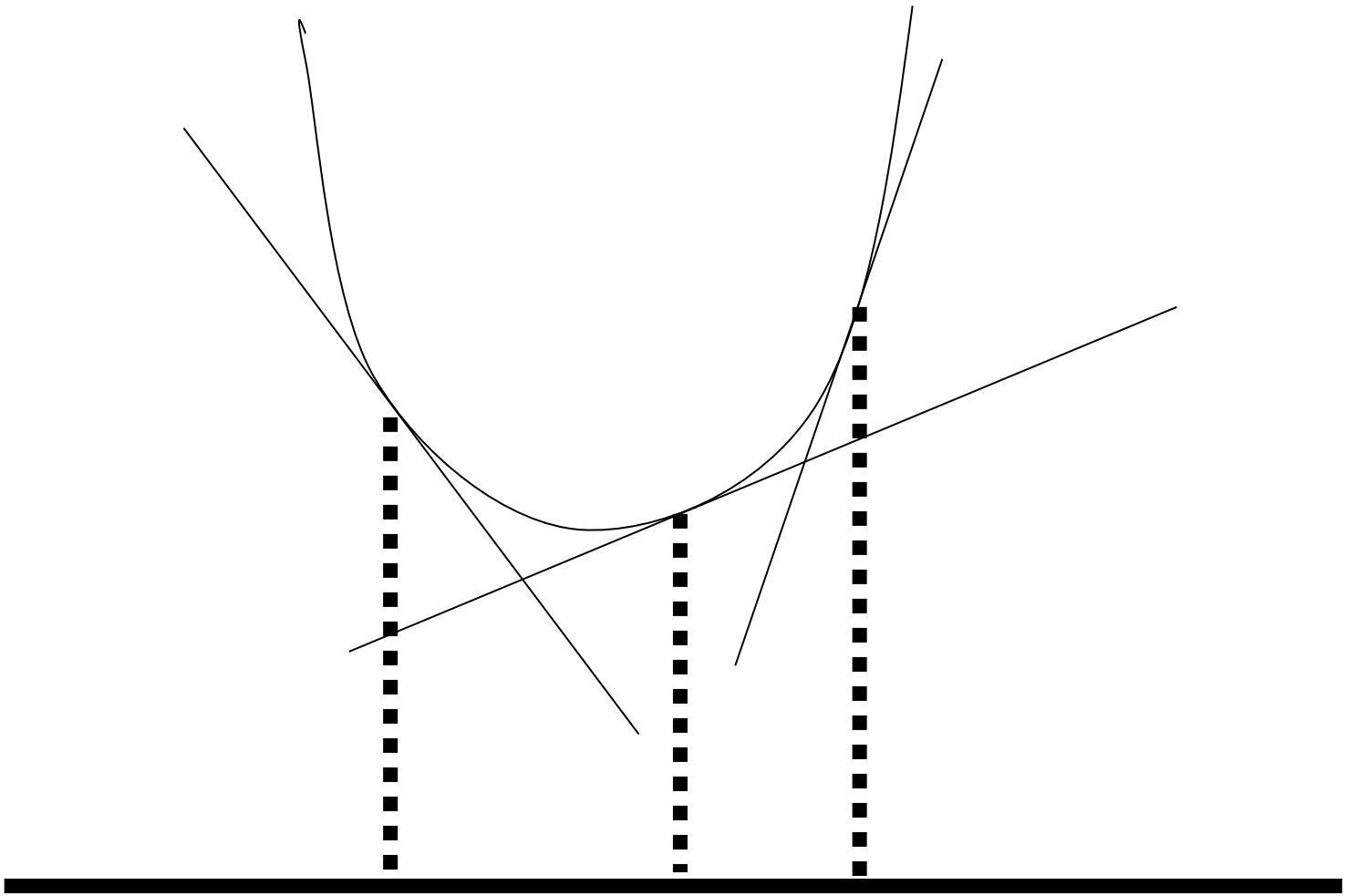
分枝切除法



うまく切除平面を加えられると
整数解が切り出せるかもしれない.

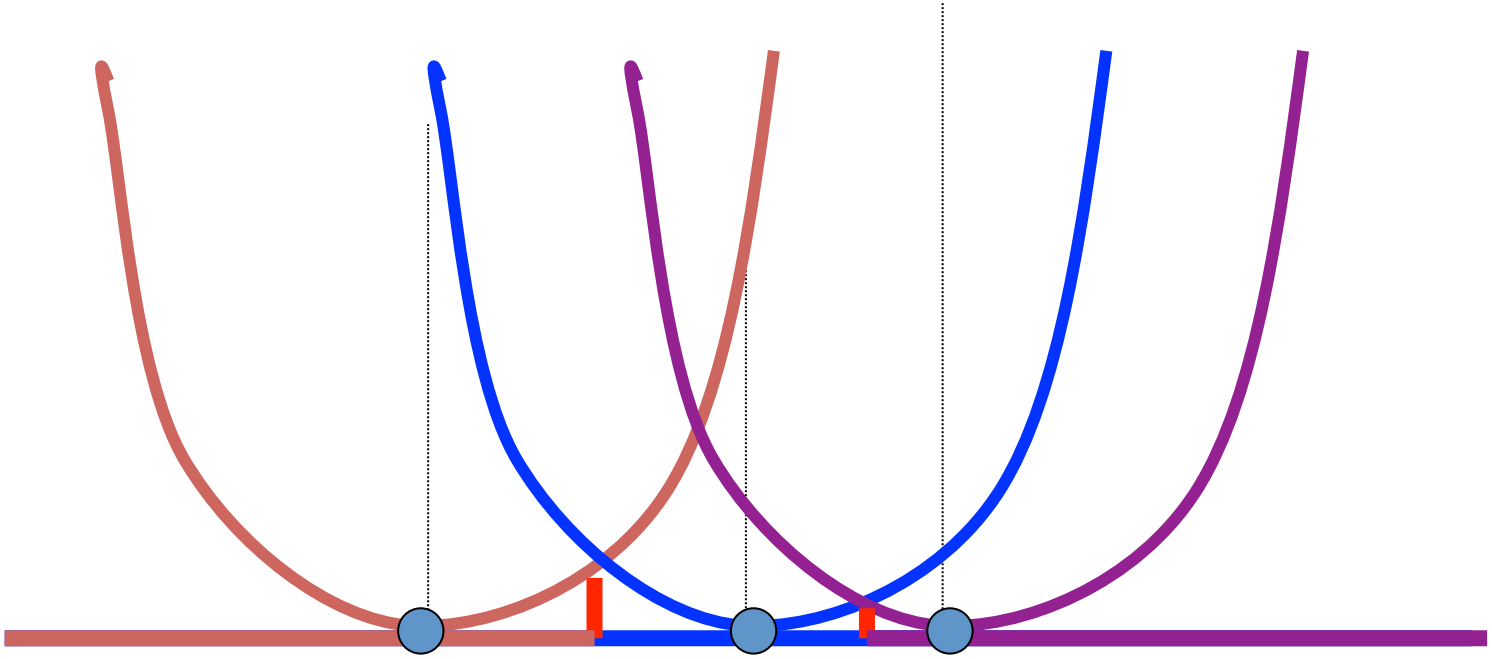
放物曲面と
ボロノイ図・
ドローネ三角形分割

放物面の 接線･接平面



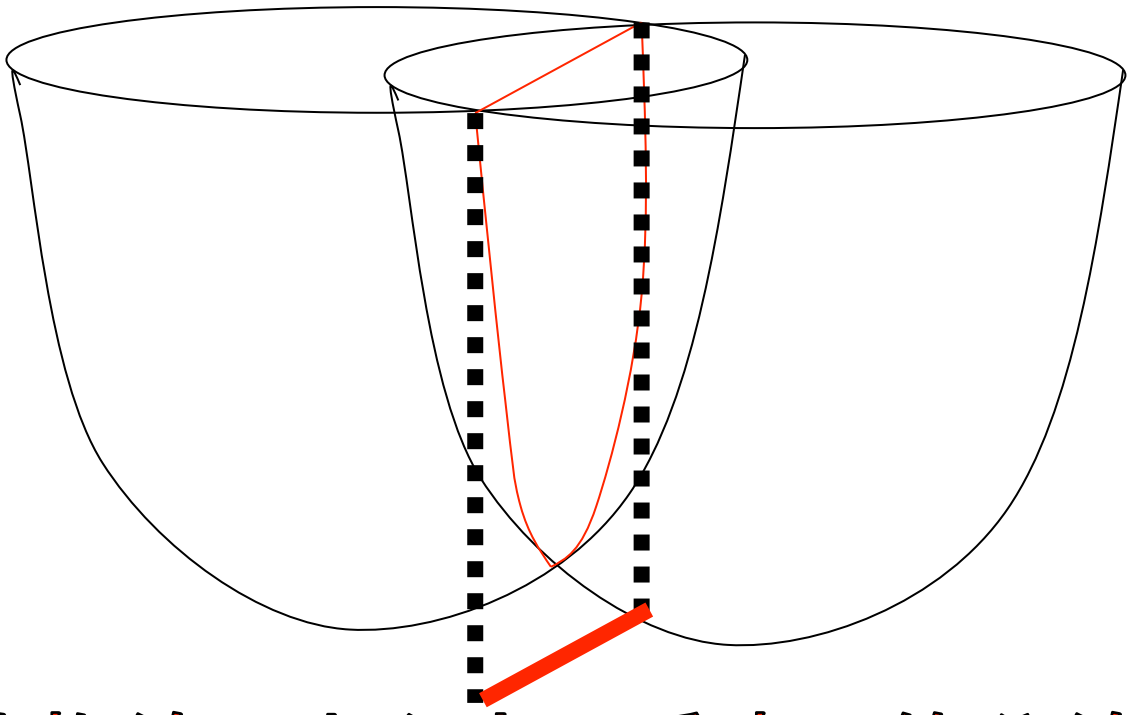
(1次元の) Voronoi図

生成点（前のページの図の接点）を中心に
描いた放物線の lower envelope をとる
→　Voronoi 図



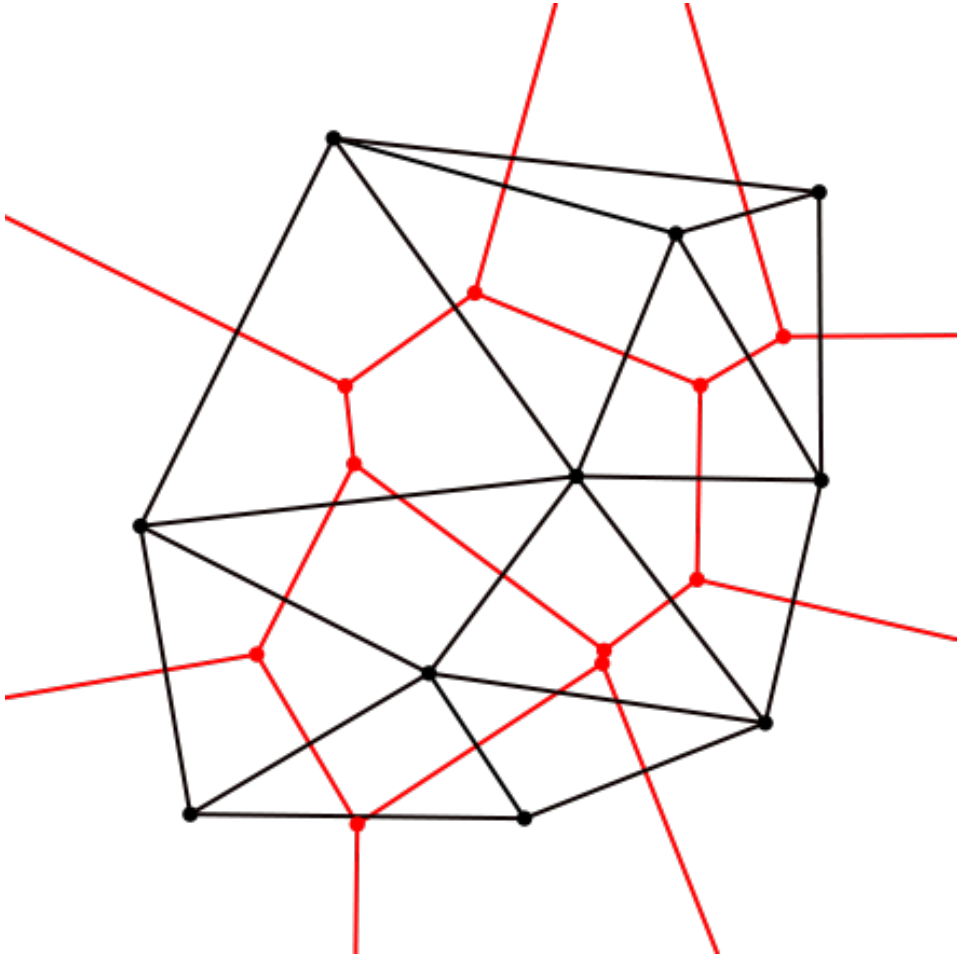
Voronoi図

（2次元）Voronoi　図
z＝0　平面に映すと？

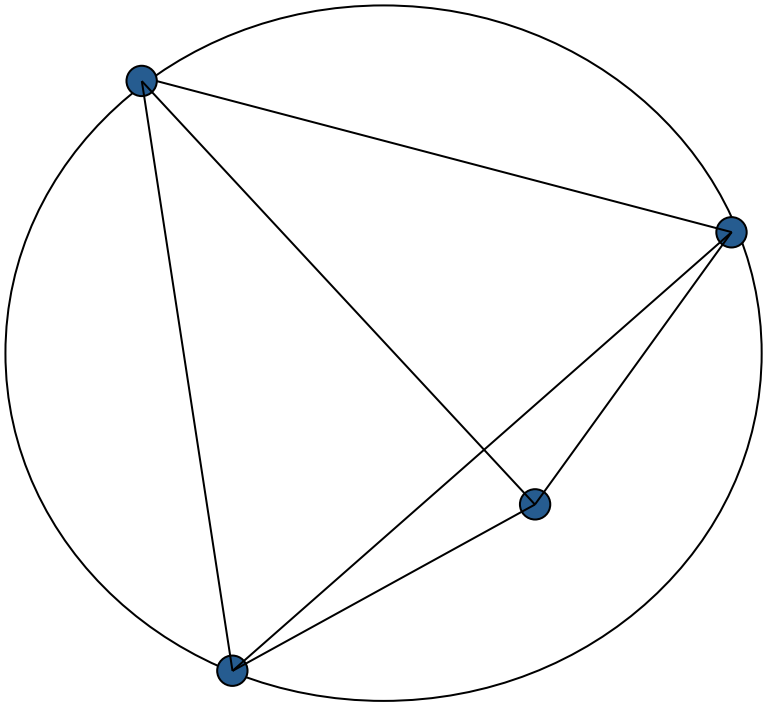


放物線の中心点の垂直二等分線

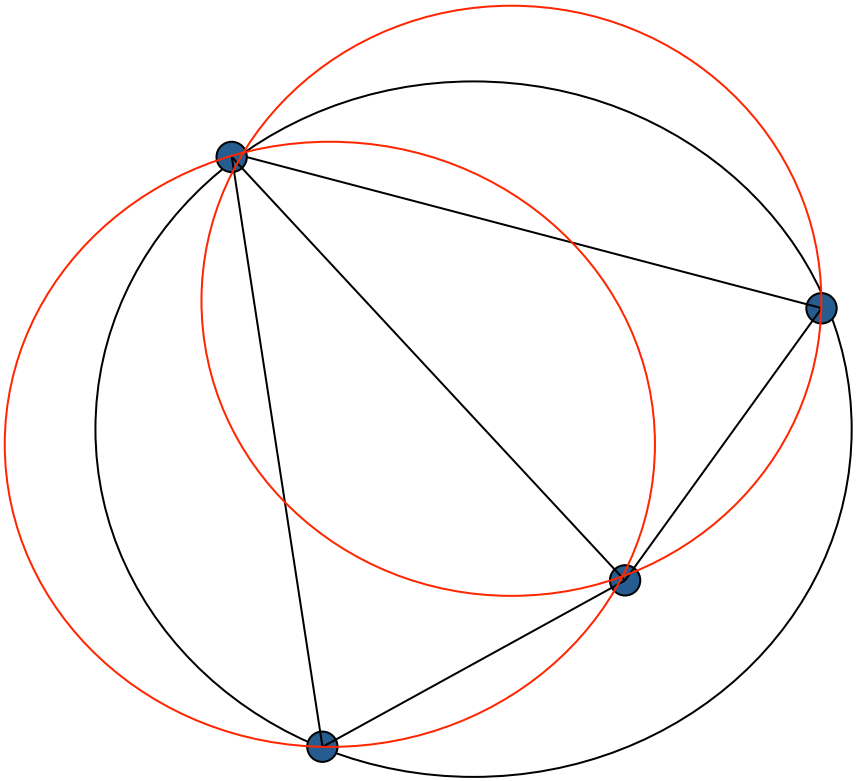
Voronoi 図と
Delaunay 三角形分割



フリップ操作



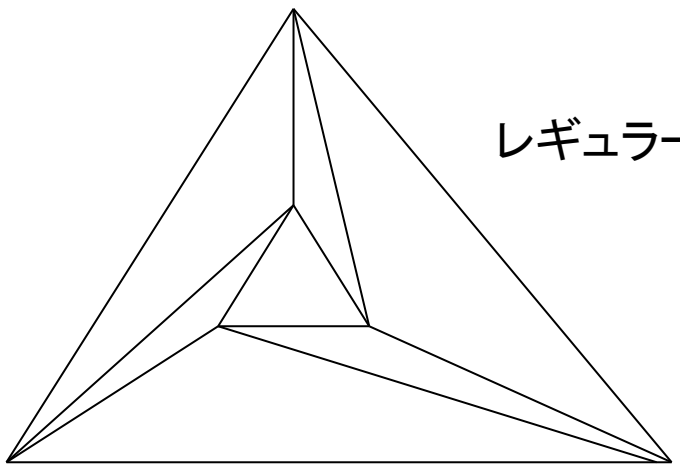
フリップ操作



プロジェクトダウン

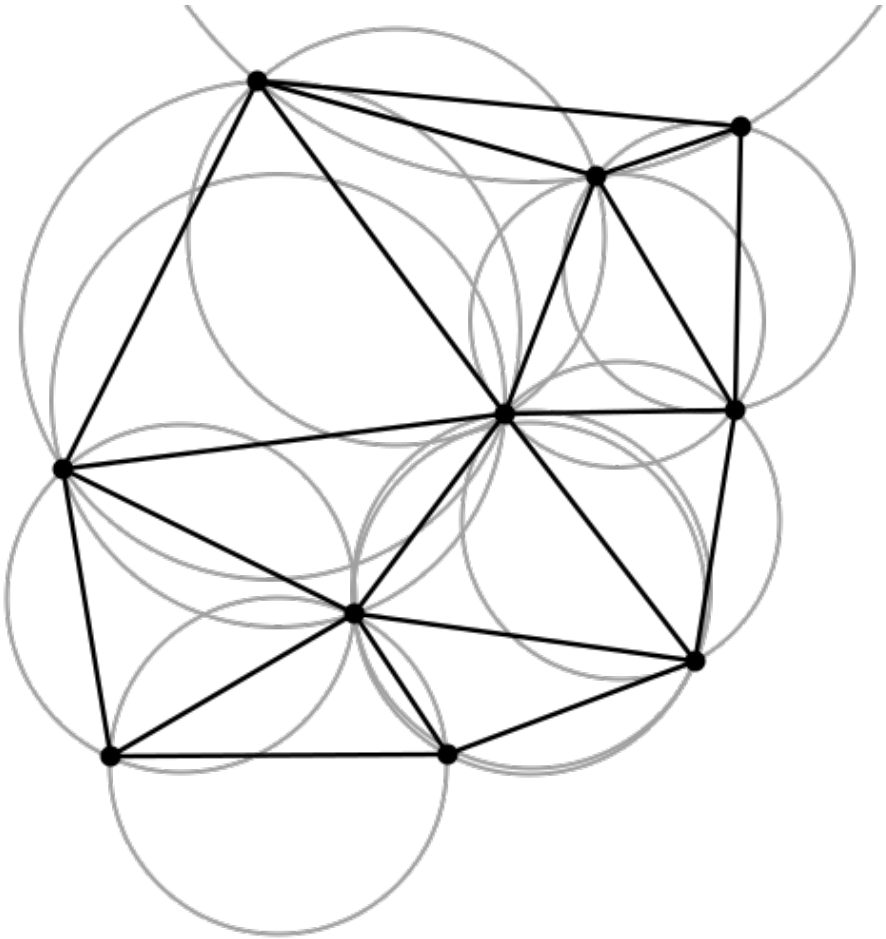
- Regular triangulation

- 放物面まで持ち上げると Delaunay



レギュラーでない三角形分割

Delaunay Triangulation



http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation